数理解析研究所講究録
973巻 1996年 53-61

Multiple positive solutions for some nonlinear elliptic systems

早稲田大学理工学部数学科

田中 和永 (Kazunaga Tanaka)

0. Introduction

次の非線型楕円型方程式系の正値解の存在, 多重度について考える.

$$k_1\Delta u + V_u(u,v) = 0, \qquad \text{in } \Omega, \tag{0.1}$$

$$k_2\Delta v + V_v(u,v) = 0, \qquad \text{in } \Omega, \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \qquad \text{on } \partial\Omega, \tag{0.3}$$

$$u(x) > 0, \quad v(x) > 0, \qquad \text{in } \Omega, \tag{0.4}$$

ここで, k_1, $k_2 > 0$, $V(u,v) \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ とし, Ω は$\mathbf{R}^N$ の有界領域で, $\partial\Omega$ は滑らかとする.

最近楕円型方程式系について解の存在問題が変分的方法により [**CdFM, CM, dFF, dFM, HvV**] 等により研究されているが, 正値解の存在, 特に多重度の研究はまだほとんど行われていないものと思われる. ここでは Lotka-Volterra competition model に hint を得たあるクラスの方程式系について多重度を保証する結果を得たのでそれを報告したい.

$V(u,v)$ について次を仮定する.

(V0) $V \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ かつ $V(u,v)$ は u, v それぞれについて偶関数, すなわち

$$V(u,v) = V(-u,v) = V(u,-v) \qquad \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

(V1) ある定数 a, b, u_0, $v_0 > 0$ が存在し $V(u,v)$ の $[0,\infty) \times [0,\infty)$ 上の critical point は

$$(0,0),\ (a,0),\ (0,b),\ (u_0,v_0)$$

のみであり, 次をみたす.

1° $0 = V(0,0) < V(u_0,v_0) < \min\{V(a,0),\ V(0,b)\}$.

2° $(0,0)$ において $V(u,v)$ は非退化な局所最小値をとる.

3° $(a,0)$, $(0,b)$ において $V(u,v)$ は非退化な局所最大値をとる.

4° (u_0,v_0) は $V(u,v)$ の非退化な鞍点である.

(V2) ある $R_0 > 0$ に対して

$$1^\circ \quad V_u(u,v) < 0 \qquad \forall (u,v) \in [R_0,\infty) \times [0,\infty).$$
$$2^\circ \quad V_v(u,v) < 0 \qquad \forall (u,v) \in [0,\infty) \times [R_0,\infty).$$

(V3)

$$1^\circ \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V_u(u,0)}{u}\right) < 0 \qquad \forall u \in [0,R_0].$$
$$2^\circ \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V_v(0,v)}{v}\right) < 0 \qquad \forall v \in [0,R_0].$$

(V4) $V_{uv}(u,v) < 0$ for all $(u,v) \in [0,R_0] \times [0,R_0]$.

条件 $(V1)$ は (0.1)–(0.3) が $(u,v) = (0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$, (u_0,v_0) なる定数解を持ち, それらを常微分方程式系 $u_t = V_u(u,v)$, $v_t = V_v(u,v)$ の定常解と見るとき, $(a,0)$, $(0,b)$ は安定, $(0,0)$, (u_0,v_0) は不安定であることを意味する. このような状況で非定数な正値解の存在および多重度を求めるのが本稿の目的である. 以下では $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$ で $-\Delta$ の Neumann 境界条件の下での固有値をあらわす.

定理 0.1 ([**T2**]). *(i)* 条件 (V0)–(V3) および

$$\det\left(\lambda_2 \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{uu}(u_0,v_0) & V_{uv}(u_0,v_0) \\ V_{uv}(u_0,v_0) & V_{vv}(u_0,v_0) \end{bmatrix}\right) < 0. \tag{M.1}$$

を仮定する. このとき (0.1)–(0.4) は少なくともひとつ非定数正値解を持つ.
(ii) (i) の仮定に加えて (V4) および

$$\det\left(\lambda_j \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{uu}(u_0,v_0) & V_{uv}(u_0,v_0) \\ V_{uv}(u_0,v_0) & V_{vv}(u_0,v_0) \end{bmatrix}\right) \ne 0 \qquad \forall\ j = 1,2,\cdots. \tag{M.2}$$

を仮定する. このとき (0.1)–(0.4) は少なくとも 2 つ非定数正値解を持つ.

空間次元 N が 1 のとき, さらに強い結果を示すことができる.

定理 0.2 ([**T2**]). $N = 1$ とし, (V0)–(V3) を仮定する.

$$m \equiv \max\left\{\ell \in \mathbf{N};\ \det\left(\lambda_\ell \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{uu}(u_0,v_0) & V_{uv}(u_0,v_0) \\ V_{uv}(u_0,v_0) & V_{vv}(u_0,v_0) \end{bmatrix}\right) < 0\right\} \tag{M.3}$$

とおき, $m \ge 2$ とする. このとき (0.1)–(0.4) は少なくとも $2(m-1)$ 個の非定数正値解を持つ.

注意 0.3. 条件 (M.1), (M.3) は (u_0,v_0) における不安定性に関する条件 — より詳しくは (u_0,v_0) での Morse index に関する条件 — であり, (k_1,k_2) が十分小のとき成立する. 注意 1.1 を参照されたい.

定理の証明について述べる前に, 条件 (V0), (V2)–(V4) について解説する. ここでは正値解の存在を考えているので, u, $v<0$ における $V(u,v)$ の挙動は本質的に問題ではない. (V0) は V の $\{u=0\}\cup\{v=0\}$ での挙動に関する条件であるとみなせる. 特に

$$V_u(0,v)=V_v(u,0)=0 \qquad \forall u,v$$

が従う. また

$$W(x,y)=V(\sqrt{x},\sqrt{y}) \qquad (x,y)\in[0,\infty)\times[0,\infty) \tag{0.5}$$

とおくと $W(x,y)\in C^1([0,\infty)\times[0,\infty),\mathbf{R})\cap C^2((0,\infty)\times(0,\infty),\mathbf{R})$ となり, 方程式は

$$\begin{aligned}
&k_1\Delta u+2W_x(u^2,v^2)u=0, && \text{in } \Omega,\\
&k_2\Delta v+2W_y(u^2,v^2)v=0, && \text{in } \Omega,\\
&\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0, && \text{on } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

の形にかけ, 方程式毎に最大値原理を適用しやすい形になっている. また数理生物モデル等における平衡状態をあらわす方程式

$$\begin{aligned}
&k_1\Delta u+f(u,v)u=0, && \text{in } \Omega,\\
&k_2\Delta v+g(u,v)v=0, && \text{in } \Omega,
\end{aligned}$$

の形をとっているともいえる. 条件 (V4) はこのように見ると $f_v<0$, $g_u<0$ となり, (0.1)–(0.4) が competition model を与えていることを意味する. また条件 (V2), (V3) は a priori 評価を得るための条件である.

competition model に対する平衡解の存在問題としては Lotka-Volterra model ($f(u,v)=a_1-b_1u-c_1v$, $g(u,v)=a_2-b_2u-c_2v$, $\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_1}{c_1}>\frac{a_2}{c_2}$) の場合に非定数正値解の存在が興味ある問題であるが, この問題は残念ながら variational structure を持たず, 定理 0.1 が適用できない. たとえ k_1, k_2 が十分小さくとも解の存在は一般の領域では (一つでも) 知られていないように思われる. $N=1$ の場合は [N] を参照のこと. (V0)–(V4) をみたす $V(u,v)$ の例は Section 4 であげる.

非線型楕円型方程式

$$-\Delta u=g(u), \qquad \text{in } \Omega, \tag{0.6}$$

$$u=0, \qquad \text{on } \partial\Omega, \tag{0.7}$$

の解の多重度は変分的手法により, 比較的よく研究されている. ここでは定理 0.1 と関連ある Hofer [**H1–H3**] の仕事を紹介するにとどめる. Hofer は条件

1° $g\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

2° $\displaystyle\limsup_{|u|\to\infty}\frac{g(u)}{u}<\lambda_1$.

3° $g(0) = 0$.

4° $g'(0) \in (\mu_i, \mu_{i+1})$ for $\exists\, i \geq 2$.

の下で, (0.6)–(0.7) の解の (正, 負, 符号の変わる解すべての) 多重度を考えた. ここで $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \cdots$ は $-\Delta$ の Dirichlet 条件の下での固有値である. Hofer はまず正値解および負の解を最小化法により求め, 次に Mountain Pass Theorem により第 3 の解を求め, そして mountain pass critical point の解析を行うことによりもうひとつの解を求め, 計 4 個の 0 でない解の存在を示した.

我々は Hofer の方法を適用することにより定理 0.1 を示し, 非線型 Sturum-Liouville 方程式に対する方法 ([**B**, **T1**] 参照) を用いることにより 定理 0.2 を示す. ここで我々は正値解のみを求めていることに注意する. 負の解, 符号の変わる解を込めて考えると $(k_1, k_2) \to (0,0)$ のとき解の個数が ∞ となることは Symmetric Mountain Pass Theorem (c.f. [**R**]) により容易にわかる.

1. Variational formulation

$V(u,v)$ を (V0)-(V3) (あるいは (V0)–(V4)) をみたす関数とする. (V0)–(V3) の解は a priori 評価 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R_0$ を持つことは容易にわかる. $V(u,v)$ の $u^2+v^2 \leq R_0^2$ での値をかえずに $u^2+v^2 \geq R_0^2$ での値を取り替えて (V0)–(V3) あるいは (V0)–(V4) に加えて

(V5) $\exists\, C_0 > 0$: $V(u,v) = -\frac{1}{2}(u^2+v^2) + C_0 \;\forall\, u^2+v^2 \geq 4R_0^2$.

をみたすように変形する. a priori 評価により, このように変形しても解は元の方程式の解となっている. 以下では (V0)–(V3) 等に加えて (V5) も仮定する.

Hilbert 空間 $E = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 上の次の functional を考える.

$$I(u,v) = \int_\Omega \left[\frac{k_1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{k_2}{2}|\nabla v|^2 - V(u,v) \right] dx.$$

条件 (V5) により, これは well-defined であり $I(u,v) \in C^2(E, \mathbf{R})$ である.

注意 1.1. $(u,v) \in E$ における Morse index を次で定義する.

$$\begin{aligned} \operatorname{index} I''(u,v) = \max\{&\dim H; H \subset E \text{ is a subspace such that} \\ &\langle\, I''(u,v)(\phi,\psi)\,,\,(\phi,\psi)\,\rangle < 0 \quad \text{for all } (\phi,\psi) \in H \setminus \{(0,0)\}\}, \end{aligned}$$

$(u,v) = (u_0, v_0)$ の場合, $-\Delta$ の固有関数展開を用いることにより容易に

$$\operatorname{index} I''(u_0,v_0) = \max\left\{ \ell \in \mathbf{N};\ \det\left(\lambda_\ell \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{uu}(u_0,v_0) & V_{uv}(u_0,v_0) \\ V_{uv}(u_0,v_0) & V_{vv}(u_0,v_0) \end{bmatrix} \right) < 0 \right\}.$$

と書くことができる. したがって (M.3) は $m = \operatorname{index} I''(u_0,v_0)$ にほかならず, (M.1) は $\operatorname{index} I''(u_0,v_0) \geq 2$ を, (M.2) は $I''(u_0,v_0)$ が非退化であることを意味する.

$I(u,v)$ の critical point は (0.1)–(0.3) の解となるが, 正値性の条件 (0.4) をみたすとは限らない. そこで解の多重度を求めるために次の functional を考える.

$$J(u,v) = \int_\Omega \left[\frac{k_1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{k_2}{2}|\nabla v|^2 - V(u,v) + \frac{A}{2}(u^2 - u_+^2 + v^2 - v_+^2) \right] dx$$
$$\in C^1(E, \mathbf{R}).$$

但し, $u_+ = \max\{u, 0\}$. また $W(x,y)$ を (0.5) により定義し

$$A = 1 + 2 \max_{x,\, y \geq 0} \{|W_x(x,y)|, |W_y(x,y)|\} < \infty$$

とおく.

$(u,v) \in E$ が $J'(u,v) = 0$ をみたすとすると次が成立する.

$$\begin{aligned}
-k_1 \Delta u + (A - 2W_x(u^2, v^2))u &= Au_+, && \text{in } \Omega, \\
-k_2 \Delta v + (A - 2W_y(u^2, v^2))v &= Av_+, && \text{in } \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} &= 0, && \text{on } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

ここで

$$A - 2W_x(u^2, v^2) \geq 1,\ A - 2W_y(u^2, v^2) \geq 1 \qquad \text{in } \Omega$$

および右辺が非負であることに注意すると, 最大値原理により $u(x) \geq 0$, $v(x) \geq 0$ が $\overline{\Omega}$ で成立する. よって $J(u,v)$ の critical point は (0.1)–(0.3) の非負解となる. また次の補題が成立する.

補題 1.1. $(u,v) \in E$ を (0.1)–(0.3) の非負解とする. $(u,v) \neq (0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ ならばそれは正値解である. ∎

ここでは条件 (V3) が主に用いられる.

定理 0.1 (i) の証明. 仮定 (V1) より $(a,0)$, $(0,b)$ は $I(u,v)$ の狭義の local minimum であることがわかるので $I(u,v)$ に次のような minimax 法を適用する.

$$\Gamma = \{\gamma(s) \in C([0,1], E);\ \gamma(0) = (a,0),\ \gamma(1) = (0,b)\},$$
$$\beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)).$$

すると次のような critical point $(u_*, v_*) \in E$ の存在がわかる.

(i) $\max\{I(a,0), I(0,b)\} < \beta = I(u_*, v_*) \leq I(u_0, v_0) < I(0,0) = 0$,

(ii) $\operatorname{index} I''(u_*, v_*) \leq 1$,

(iii) $u_*(x) \geq 0$, $v_*(x) \geq 0$ in $\overline{\Omega}$.

(iii) は

$$P = \{(u,v) \in E;\, u \geq 0,\, v \geq 0 \quad \text{in } \overline{\Omega}\},$$
$$\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma;\, \gamma(s) \in P \quad \forall s \in [0,1]\}.$$

とおくと $\beta = \inf_{\gamma\in\Gamma_+} \max_{s\in[0,1]} I(\gamma(s))$ が成立していることにより従う. 仮定 (M.1) より index $I''(u_0,v_0) \geq 2$ であるから (i) とあわせて $(u_*,v_*) \notin \{(0,0), (a,0), (0,b), (u_0,v_0)\}$ となり補題 1.1 により (u_*,v_*) は (0.1)–(0.4) の非定数正値解である. ∎

2. 定理 0.1 (ii) の証明

定理 0.1 (ii) の証明は背理法による. 以下 $J(u,v)$ の critical point は

$$(0,0),\ (a,0),\ (0,b),\ (u_0,v_0),\ (u_*,v_*)$$

のみであるとし, 矛盾を導く.

この仮定の下では, 次の等式が十分大きな $R > 0$ に対して成り立つ.

$$\begin{aligned}\deg(J',0,B_R(0,0)) =& \deg_{\rm loc}(J',(0,0)) + \deg_{\rm loc}(J',(a,0)) + \deg_{\rm loc}(J',(0,b)) \\ &+ \deg_{\rm loc}(J',(u_0,v_0)) + \deg_{\rm loc}(J',(u_*,v_*)).\end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで $B_R(0,0) = \{(u,v) \in E;\, \|(u,v)\|_{H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)} < R\}$ である. ここにあらわれる各 degree を計算すると

命題 3.2.
(i) $\deg_{\rm loc}(J',(0,0)) = 0$.
(ii) $\deg_{\rm loc}(J',(a,0)) = \deg_{\rm loc}(J',(0,b)) = 1$.
(iii) $\deg_{\rm loc}(J',(u_0,v_0)) = (-1)^{\text{index } I''(u_0,v_0)}$.
(iv) $\deg_{\rm loc}(J',(u_*,v_*)) = -1$. ∎

命題 3.3. 十分大きな $R \geq 1$ に対して

$$\deg(J',0,B_R(0,0)) = 1.$$ ∎

ここで注意を要するのは $\deg_{\rm loc}(J',(0,0))$ と $\deg_{\rm loc}(J',(u_*,v_*))$ の計算であろう. $\deg_{\rm loc}(J',(0,0))$ は直接計算により求められ,

$$\begin{aligned} -\Delta u - u + Au &= Au_+, \qquad && \text{in } \Omega, \\ u &= 0, && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

の $u=0$ での local degree が 0 となることに基づいている．(ここで Dancer [**D**] に類似の idea を用いている.) $\deg_{\mathrm{loc}}(J',(u_*,v_*))=-1$ は Hofer の結果 [**H2, H3**] による．ここで仮定 (V4) により $I''(u_*,v_*)$ の第 1 固有値が simple であることが用いられる．

(2.1), 補題 1.1, 補題 1.2 により容易に矛盾が導け, 定理 0.1 (ii) は証明される． ∎

2. 定理 0.2 の証明

定理 0.2 の証明は Morse index $\operatorname{index} I''(u,v)$ と $(u'(x),v'(x))$ のゼロ点の個数の関係を調べることにより行われる．非線型 Sturm-Liouville 方程式に対する類似の議論については [**B, T1**] を参照されたい．ここでは仮定 (V4) は必要とされない．以下一般性を失わずに $\Omega=(0,1)$ とし

$$k_1u''+V_u(u,v)=0, \quad \text{in } (0,1), \tag{3.1}$$

$$k_2v''+V_v(u,v)=0, \quad \text{in } (0,1), \tag{3.2}$$

$$u'(0)=u'(1)=v'(0)=v'(1)=0, \tag{3.3}$$

$$u(x)>0,\ v(x)>0, \quad \text{in } (0,1), \tag{3.4}$$

を考える．

命題 3.1. $(u,v)\in E$ を (3.1)–(3.4) の非定数正値解とする．ある $x_0\in(0,1)$ に対して

$$u'(x_0)=v'(x_0)=0$$

とする．このとき $\operatorname{index} I''(u,v)\geq 2$ が成立する． ∎

この命題は方程式 (3.1)–(3.2) を微分することにより (u',v') が $I''(u,v)$ の固有関数になっていることおよび固有値の minimax による特徴づけにより従う．この命題より特に $\operatorname{index} I''(u_*,v_*)\leq 1$ より $(u_*(1-x),v_*(1-x))$ が (u_*,v_*) と異なる非定数正値解を与えることがわかる．よって $m=\operatorname{index} I''(u_0,v_0)\geq 2$ のとき (3.1)–(3.4) は少なくとも非定数正値解を 2 つ持つ．$m=\operatorname{index} I''(u_0,v_0)\geq 3$ のとき $2(m-1)$ 個の解を求めるためには $(0,1)$ の部分区間 $(0,1/j)$ $(j=1,\cdots,m-1)$ で考えればよい． ∎

4. 例

条件 (V0)–(V4) をみたす $V(u,v)$ の例としては次のものがあげられる．

$$V(u,v)=\frac{a}{2}u^2+\frac{c}{2}v^2-\frac{b}{4}u^4-\frac{d}{4}v^4-\frac{1}{2}u^2v^2$$

ここで定数 $a,\ b,\ c,\ d>0$ は $bc<a<\frac{c}{d}$ をみたすとする．対応する方程式は

$$k_1\Delta u+(a-bu^2-v^2)u=0, \quad \text{in } \Omega, \tag{4.1}$$

$$k_2\Delta v+(c-u^2-dv^2)v=0, \quad \text{in } \Omega, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0, \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{4.3}$$

$$u(x)>0, \quad v(x)>0, \quad \text{in } \Omega, \tag{4.4}$$

である. 定理 0.1, 0.2 の特別な場合として

定理 4.1. $bc < a < \frac{c}{d}$ を仮定する.
(i) 条件

$$\det\left(\lambda_2 \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} + \frac{2}{1-bd} \begin{bmatrix} \frac{b(c-ad)}{\sqrt{(a-bc)(c-ad)}} & \sqrt{(a-bc)(c-ad)} \\ & d(a-bc) \end{bmatrix}\right) < 0.$$

が成立すれば (4.1)–(4.4) は少なくともひとつ非定数正値解を持つ
(ii) 更に *(i)* の仮定に加えて

$$\det\left(\lambda_j \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} + \frac{2}{1-bd} \begin{bmatrix} \frac{b(c-ad)}{\sqrt{(a-bc)(c-ad)}} & \sqrt{(a-bc)(c-ad)} \\ & d(a-bc) \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

がすべての $j \in \mathbf{N}$ に対して成立すれば (4.1)–(4.4) は少なくとも 2 個非定数正値解を持つ.
(iii) $N = 1$ とする.

$$\begin{aligned} m \equiv \max\Bigg\{\ell \in \mathbf{N};\ \det\Bigg(\lambda_\ell & \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \\ & + \frac{2}{1-bd} \begin{bmatrix} \frac{b(c-ad)}{\sqrt{(a-bc)(c-ad)}} & \sqrt{(a-bc)(c-ad)} \\ & d(a-bc) \end{bmatrix}\Bigg) < 0\Bigg\} \end{aligned}$$

とおき, $m \geq 2$ とする. このとき (4.1)–(4.4) は少なくとも $2(m-1)$ 個非定数正値解を持つ. ∎

注意 4.2. 更に一般的な方程式

$$\begin{aligned} & k_1 \Delta u + (a_1 - b_1 u^2 - c_1 v^2) u = 0, && \text{in } \Omega, \\ & k_2 \Delta v + (a_2 - b_2 u^2 - c_2 v^2) v = 0, && \text{in } \Omega, \\ & \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, && \text{on } \partial\Omega, \\ & u(x) > 0, \quad v(x) > 0, && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

も適当な scaling により (4.1)–(4.4) に帰着できる.

References

[B] H. Berestycki, Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaire elliptiques, *J. Funct. Anal.* **40** (1981), 1–29.

[CdFM] Ph. Clément, D. G. de Figueiredo and M. Mitidieri, Positive solutions of semilinear elliptic systems, *Comm. Partial Diff. Eq.* **17** (1992), 923–940.

[CM] D. G. Costa and C. A. Magalhães, A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic systems, *J. Diff. Eq.* **111** (1994), 103–122.

[D] E. N. Dancer, On the indices of fixed points of mappings in cones and applications, *J. Math. Anal. Appl.* **91** (1983), 131–151.

[dFF] D. G. de Figueiredo and P. Felmer, On superquadratic elliptic systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **343** (1994), 99–116.

[dFM] D. G. de Figueiredo and C. A. Magalhães, On nonquadratic Hamiltonian elliptic systems, *Advances in Diff. Eq.* **1** (1996), 881–898.

[H1] H. Hofer, Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces, *Math. Ann.* **261** (1982), 493–514.

[H2] H. Hofer, A note on the topological degree at a critical point of mountain pass type, *Proc. Amer. Math. Soc.* **90** (1994), 309–315.

[H3] H. Hofer, The topological degree at a critical point of mountain pass type, *Proc. Symp. Pure Math.* **45** (1986), 501–509.

[HvV] J. Hulshof and R. vander Vorst, Differential systems with strongly definite variational structure, *J. Funct. Anal.* **114** (1993), 32–58.

[N] K. Nakashima, *in preparation.*

[R] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* **65** *Amer. Math. Soc., Providence* 1986.

[T1] K. Tanaka, Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications, *Comm. Partial Diff. Eq.* **14** (1989), 99–128.

[T2] K. Tanaka, Multiple positive solutions for some nonlinear elliptic systems, *preprint.*